SEDUC OLÍMPICA

TME²

TORNEIO DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS ESTADUAIS DO PIAUÍ

1ª Fase

Ensino Médio

Gabarito Oficial e Resolução Comentada

1. Alternativa (B)

A resolução da expressão $2 + 2 \times 3$ parte do entendimento de que precisamos encontrar o resultado de uma soma de dois termos em que o primeiro é igual a 2 e o segundo, $2 \times 3 = 6$. Logo, o resultado final é dado por $2 + 6 = 8$.

2. Alternativa (D)

Os conectivos lógicos "e" e "ou" relacionam-se, nessa ordem, com as relações de intersecção e união. No nosso problema, João deve deixar a porta fechada sempre que entrar ou sair; fechada, se entrar e ainda sair; fechada, se entrar e a porta estava aberta; aberta, se apenas entrar ou apenas sair. Ao adentrar à repartição, João entrou e saiu em cada uma das portas A e B, deixando A e B fechadas.

3. Alternativa (E)

Ana comeu a terça parte do restante, ou seja, 2 fatias. Como Celene também comeu 2 fatias, juntas, Ana e Celene, comeram 4 fatias.

4. Alternativa (D)

Se x é o número procurado, o aumento de 20% dele estará representado como x + 20% de x, ou seja, $x + 0,2x = 1,2x$. A equação se completa assim: $1,2x = 60$.

5. Alternativa (C)

Pela escolha em justapor as figuras a medida do lado dos triângulos equiláteros é igual a 20 metros. Sem passar duas vezes pelo mesmo lugar de caminhada, a distância máxima que uma pessoa pode percorrer sobre o perímetro da praça ou pelos lados do quadrado é igual a 12 x 20 = 240 metros.

6. Alternativa (B)

É suficiente considerar os 2/3 de 120, ou seja, 80 respostas em favor de handebol e os 3/4 de 120, ou seja, 90 estudantes que preferem futsal; e verificar que (90+80) – 120 = 50 estudantes responderam gostar dos dois esportes.

7. Alternativa (E)

Se 6 metros de um tecido custam 36 reais, é verdade que 1 metro do mesmo tecido custa 6 reais e 9 metros custam $9 \times 6 = 54$ reais. Logo, A = 54.
Se 5 laranjas custam 2 reais cada, e 20 reais corresponde a 10 cédulas de 2 reais cada, é possível comprar, portanto, $10 \times 5 = 50$ laranjas com 20 reais em mãos. Logo, B = 50.
A única alternativa incorreta é a letra (e) haja visto que $A \times B = 54 \times 50 = 2700 \neq 625$

8. Alternativa (E)

Na primeira coluna são colocados, sucessivamente, 1×1, 1×2, 1×3, 1×4, 1×5, 1×6 grãos. Totalizando, $1 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)$. Seguindo assim, nas próximas colunas teremos: $2 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)$, $3 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)$, $4 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)$, $5 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)$. Finalmente, na sexta coluna, são colocados $6 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)$.

Portanto, o total de grãos colocados no tabuleiro é igual a:

$1 \times (1+2+3+4+5+6) + 2 \times (1+2+3+4+5+6) + 3 \times (1+2+3+4+5+6) + 4 \times (1+2+3+4+5+6) +$
$+5 \times (1+2+3+4+5+6) + 6 \times (1+2+3+4+5+6) = (1+2+3+4+5+6) \times (1+2+3+4+5+6) = 21^2 =$
$=441$.

9. Alternativa (A)

Pelo Teorema de Pitágoras
$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow 13^2 = AB^2 + 12^2 \Rightarrow AB^2 = 169 - 144 \Rightarrow AB = \sqrt{25} = 5$

Seja EA = EC, teremos, BE = 12 - x. Ainda por Pitágoras, $AE^2 = AB^2 + BE^2 \Rightarrow x^2 = 5^2 + (12 - x)^2$
$\Rightarrow x = \dfrac{169}{24}$.

10. Alternativa (B)
Reescrevendo a expressão algébrica

$\dfrac{a^2 + ab}{a^2 + a + ab + b} = \dfrac{a(a+b)}{a(a+1)+b(a+1)} = \dfrac{a(a+b)}{(a+1)(a+b)} = \dfrac{a}{a+1}$, concluímos que a fração $\frac{3}{4}$ é um possível valor numérico para a expressão.

11. Alternativa (D)

Sabemos que $(x+y) \oplus (y+z) \oplus (z+x) = x \cdot y \cdot z$ e queremos saber o valor de $12 \oplus 17 \oplus 9$. Noutras palavras, queremos saber o valor de $(x+y) \oplus (y+z) \oplus (z+x)$ quando $(x+y)=12$, $(y+z)=17$ e $(z+x)=9$. Das três últimas igualdades, temos:

$$\begin{cases} x+y = 12 & \text{(I)} \\ y+z = 17 & \text{(II)} \\ z+x = 9 & \text{(III)} \end{cases}$$

Somando-se as três equações do sistema:
$(x+y) + (y+z) + (z+x) = 12 + 17 + 9$
$2(x+y+z) = 38$
$x+y+z = 19 \qquad \text{(IV)}$
Das equações (II) e (IV): $x = x+y+z - (y+z) = 19 - 17 = 2$.
Das equações (III) e (IV): $y = x+y+z - (z+x) = 19 - 9 = 10$.
Das equações (I) e (IV): $z = x+y+z - (x+y) = 19 - 12 = 7$.

Assim, $x=2$, $y=10$ e $z=7$.
Portanto, sendo $(x+y)=12$, $(y+z)=17$ e $(z+x)=9$, obtemos $12 \oplus 17 \oplus 9 = (x+y) \oplus (y+z) \oplus (z+x) =$
$= x \oplus y \oplus z = 2 \oplus 10 \oplus 7 = 140$.

12. Alternativa (C)

Seu Jorge dispõe de 5 chaves para abrir 4 portas. Ao abrir a primeira das postas, Seu Jorge fracassará no máximo em quatro tentativas, conseguindo abrir com a última das chaves testadas. A chave que abriu a primeira porta não abrirá as demais. Então, para abrir a segunda porta Seu Jorge dispõe de 4 chaves e, na pior das hipóteses, fará 3 tentativas fracassadas, conseguindo abrir apenas na quarta tentativa. Da mesma forma, para abrir a terceira porta, Seu Jorge fará no máximo 2 tentativas fracassadas e, por fim, para abrir a quarta porta fará no máximo 1 tentativa fracassada. Logo, o número máximo de tentativas fracassadas realizadas é igual a $4+3+2+1 = 10$ tentativas.

13. Alternativa (C)

De acordo com os dados do problema, sejam **v** o número de vitórias, **d** o número de derrotas e **e** o número de empates, a igualdade $x = v + d + e$ deve ser reescrita como $x = 2d + d + 14$, ou seja, $x = 3d + 12 + 2 = 3(d + 4) + 2$. O número de partidas, x, deve ser um valor que deixa resto 2 na divisão por 3. Das alternativas, o número 50 é o único com essa característica.

14. Alternativa (A)

Mostraremos, inicialmente, que o quadrado de um número inteiro positivo sempre deixa resto 0 ou 1 na divisão por 4. Para isso, note que qualquer número inteiro pode ser escrito como 4k, 4k + 1, 4k + 2 ou 4k + 3, onde k é um número inteiro. Vamos considerar separadamente cada um desses casos:

- Se $n = 4k$, $n^2 = (4k)^2 = 16k^2$, que é divisível por 4, portanto, resto zero.
- Se $n = 4k + 1$, $n^2 = (4k + 1)^2 = 16k^2 + 8k + 1 = 4(4k^2 + 2k) + 1$, que deixa resto 1 na divisão por 4.
- Se $n = 4k + 2$, $n^2 = (4k + 2)^2 = 16k^2 + 16k + 4 = 4(4k^2 + 4k + 1)$, que é divisível por 4 e deixa resto zero.
- Se $n = 4k + 3$, $n^2 = (4k + 3)^2 = 16k^2 + 24k + 9 = 4(4k^2 + 6k + 2) + 1$, que deixa resto 1 na divisão por 4.

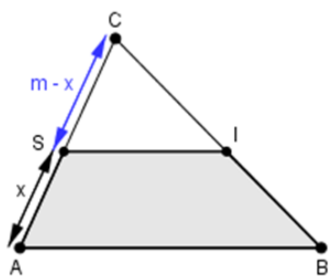
Assim, em todos os casos, o quadrado de um número inteiro positivo deixa resto zero ou 1 na divisão por 4. Com isso, podemos concluir que os possíveis restos da divisão de $a^2+b^2+c^2$ por 4 são 0+0+0=0, 1+0+0=1, 1+1+0 = 2 ou 1+1+1 = 3, como $a^2+b^2+c^2$ é múltiplo de 4, a única possibilidade é a primeira, ou seja, a^2, b^2 e c^2 deixam resto zero na divisão por 4. Portanto a,b e c são pares.

15. Alternativa (B)

Sejam A, B, C e D os jogadores semifinalistas no torneio de xadrez. Pelas regras da competição, onde cada jogador enfrenta cada um dos outros três uma única vez, serão jogadas exatamente $\frac{4\times 3}{2} = 6$ partidas. Para que ao final de cada partida seja garantida a entrega de uma cartela personalizada para cada jogador, a organização do torneio deve confeccionar cartelas em quantidade suficiente para atender todas as possibilidades de resultado em cada uma das 6 partidas. Por exemplo, a partida disputada pelos jogadores A e B, exige a produção de 3 cartelas para cada jogador A e B, uma vez que cada cartela apresenta o nome do jogador junto ao resultado conquistado, logo, $3\times 2 = 6$ cartelas, lembrando que a ordem de cada jogo foi definida em sorteio. Com isso, a organização do torneio deve confeccionar $6\times 6 = 36$ cartelas distintas.

16. Alternativa (A)

Seja m a medida do lado AC. Como SI é paralelo a AB, já que ABIS é um trapézio, podemos concluir que os triângulos SIC e ABC são semelhantes, pelo caso AA. Sabendo que a razão entre as áreas de triângulos semelhantes é o quadrado da razão de semelhança, temos:



$$\frac{A(SIC)}{A(ABC)} = \left(\frac{m - x}{m}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$A(SIC) = A(ABC).\ \frac{m^2 - 2mx + x^2}{m^2} \Leftrightarrow$$

$$A(SIC) = \frac{A\ (ABC).m^2}{m^2} - \frac{A\ (ABC).2mx}{m^2} + \frac{A\ (ABC).x^2}{m^2} \Leftrightarrow$$

$$A(SIC) = A(ABC) - \frac{2m.A(ABC).\ x}{m^2} + \frac{A\ (ABC).x^2}{m^2}$$

Sendo assim a área da região destacada é dada por:

$$y = A(ABIS) = A(ABC) - A(SIC)$$

$$y = A(ABC) - \left[A(ABC) - \frac{2.A(ABC).x}{m} + \frac{A(ABC).x^2}{m^2} \right] \Leftrightarrow$$

$$y = A(ABC) - A(ABC) + \frac{2.A(ABC).x}{m} - \frac{A(ABC).x^2}{m^2} \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{2.A(ABC)}{m} . x - \frac{A(ABC)}{m^2} . x^2$$

$$y = f(x) = -\frac{A(ABC)}{m^2} . x^2 + \frac{2 . A(ABC)}{m} . x$$

A última expressão mostra que y é uma função quadrática, em x, com coeficiente do termo em x^2 negativo, já que $\frac{A(ABC)}{m^2}$ é positivo. Logo, seu gráfico é o ramo crescente de uma parábola com concavidade voltada para baixo.